1

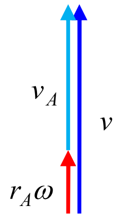
(A)

大気は無風状態だから，その速さは地球の自転の角速度の大きさを用いて $r_A\omega$ と表せる。

飛行機は，プロペラ機であれば空気を，ジェット機であれば排気ガスを，飛行方向と逆方向に噴射することで大気から受ける力積を利用して飛行するから，

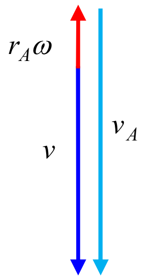
地球の自転と同じ向きに速さ v で飛行しているのであれば， $v > r_A\omega$ である。

よって，大気に対する速さ $v_A = v - r_A\omega \quad \therefore v = v_A + r_A\omega$



飛行機が地球の自転と逆向きに速さを v で飛行しているとき，

$v_A = v + r_A\omega \quad \therefore v = v_A - r_A\omega$



補足

飛行機は空気を利用して飛ぶものであるから，空気のない宇宙空間への飛行は無理。

(1)

$$\frac{m(v_A + r_A\omega)^2}{r_A}$$

(2)

$$m_0 = \frac{kx_0 {r_A}^2}{GM - r_A(v_A + r_A\omega)^2}$$

解説

飛行機の中で静止している観測者から見たとき，

物体 W に働く万有引力＝物体 W に働く遠心力＋物体 W に働くばねの弾性力

より， $\dfrac{Gm_0M}{{r_A}^2} = \dfrac{m_0(v_A + r_A\omega)^2}{r_A} + kx_0 \quad \therefore m_0 = \dfrac{kx_0{r_A}^2}{GM - r_A(v_A + r_A\omega)^2}$

補足

放物飛行（パラボリックフライト）と無重量状態

斜方投射されたボールは重力のみを受けて放物運動をするから，

ボール内の質量 m の物体はその重力 mg （下向き）と慣性力 mg （上向き）受ける。

よって，ボール内の物体の見かけの重力は $mg-mg=0$ 。すなわち無重量状態となる。

このことを利用し，飛行機の噴射を止め放物運動に入れることで機内を無重量状態にする飛行を放物飛行（パラボリックフライト）という。

(3)

$$\frac{1}{2}m(v_A-r_A\omega)^2-\frac{GmM}{r_A}$$

(B)

(4)

0

解説

ガス噴射していない宇宙ステーションは万有引力のみを受けて運動しているから，

宇宙ステーション内では，装置は地球の中心方向と逆方向に大きさ $\frac{Gm_0M}{{r_B}^2}$ の慣性力と

地球の中心方向に大きさ $\frac{Gm_0M}{{r_B}^2}$ の万有引力を受けることになる。

その結果，装置に働く力が相殺され，装置は無重量状態となる。

よって，装置が宇宙ステーションの床から受ける垂直抗力は 0 である。

あるいは，

装置が床から受ける垂直抗力と床がばねから受ける弾性力は作用反作用の関係にあり，

「物体 W に働く万有引力＝物体 W に働く遠心力＋物体 W に働くばねの弾性力」と

宇宙ステーションは点 O からの距離 r_B の円軌道上を『等速円運動』することから，

装置の円軌道の中心方向の運動方程式は $m_0\cdot\frac{{v_B}^2}{r_B}=G\cdot\frac{m_0M}{{r_\mathrm{B}}^2}$,

すなわち「物体 W に働く万有引力＝物体 W に働く遠心力」より，

物体 W に働くばねの弾性力は 0 である。

よって，装置が床から受ける垂直抗力も 0 である。

(5)

$$\frac{k{t_0}^2}{4\pi^2}$$

解説

$t_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ より

(6)

$v_B = r_B \omega$

(7)

$\sqrt[3]{\dfrac{GM}{\omega^2}}$

解説

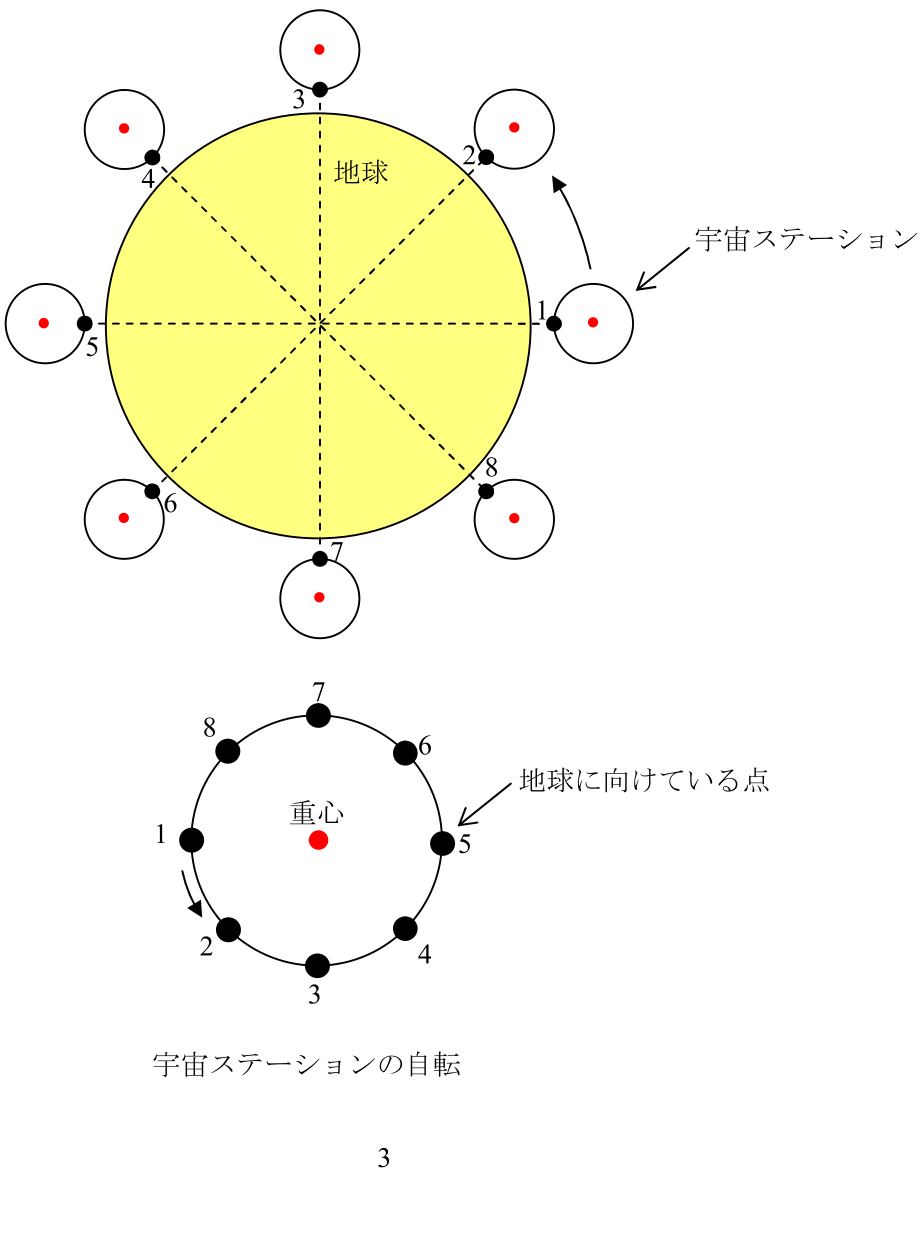
$$m r_B \omega^2 = \frac{GMm}{r_B{}^2} \text{ より，} \quad r_B{}^3 = \frac{GM}{\omega^2} \qquad \therefore r_B = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

(8)

宇宙ステーションが地球を公転する周期と宇宙ステーションの重心のまわりの回転周期が一致する。

解説

宇宙ステーションの公転



宇宙ステーションの自転

(9)

$r_B\omega+\dfrac{m_1}{m}v_1$

解説

宇宙ステーションの進行方向を正とすると，

宇宙ステーションから小宇宙船の発射速度は$-v_1$である。

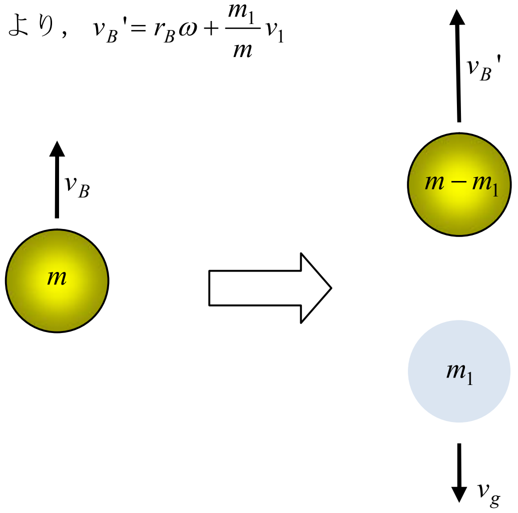
よって，発射後の宇宙ステーションの速度をv_B'，小宇宙船の速度をv_cとすると，

$-v_1=v_c-v_B' \quad \therefore v_c=v_B'-v_1$

これと運動量保存則の式$mv_B=(m-m_1)v_B'+m_1v_c$より，

$mv_B=(m-m_1)v_B'+m_1(v_B'-v_1) \quad \therefore v_B'=v_B+\dfrac{m_1}{m}v_1$

これと$v_B=r_B\omega$より，$v_B'=r_B\omega+\dfrac{m_1}{m}v_1$



(10)

$\dfrac{m}{m_1}\left(\sqrt{\dfrac{2GM}{r_B}}-r_B\omega\right)$

解説

宇宙ステーションが地球からの万有引力を脱するとは，

宇宙ステーションが地球から無限遠方に離れることであり，

無限遠方での宇宙ステーションの地球からの万有引力の位置エネルギーは 0，

宇宙ステーションの運動エネルギーが 0 以上であるから，

無限遠方における宇宙ステーションの力学的エネルギーは 0 以上である。

このことと力学的エネルギー保存則より，

小宇宙船発射直後の宇宙船の力学的エネルギーも 0 以上である。

よって，

$$\frac{1}{2}(m-m_1)v_B'^2-\frac{G(m-m_1)M}{r_B}\geq 0 \quad \therefore v_B'\geq\sqrt{\frac{2GM}{r_B}}$$

これと $v_B'=r_B\omega+\dfrac{m_1}{m}v_1$ より，$r_B\omega+\dfrac{m_1}{m}v_1\geq\sqrt{\dfrac{2GM}{r_B}}$　　$\therefore v_1\geq\dfrac{m}{m_1}\left(\sqrt{\dfrac{2GM}{r_B}}-r_B\omega\right)$

(11)

噴射の速さ：$\dfrac{m_1}{m_2}v_1$，噴射の向き：宇宙ステーションの前方へ噴射

解説

等速円運動の中心方向の運動方程式 $\dfrac{mv_B{}^2}{r_B}=\dfrac{GmM}{r_B{}^2}$ より，$r_B=\dfrac{GM}{v_B{}^2}$

よって，軌道半径 r_B を維持するための必要十分条件は，速さ v_B を維持することである。

ガス噴射を行わないで小宇宙船を発射すると，

(9)解説より，$v_B'=v_B+\dfrac{m_1}{m}v_1$ となるから，

宇宙ステーションの速度の大きさは小宇宙船発射前より大きくなる。

よって，ガスは宇宙ステーションの前方へ噴射する必要がある。

このときのガス噴出速度を v_g とすると，

軌道を維持した宇宙ステーションの速度は v_B のままだから，

$$v_2=v_g-v_B \quad \therefore v_g=v_2+v_B$$

また，小宇宙船の速度は(9)の解説と同様にして，$v_c=v_B-v_1$

これと運動量保存則の式 $mv_B=(m-m_1-m_2)v_B+m_1v_c+m_2v_g$ より，

$$mv_B=(m-m_1-m_2)v_B+m_1(v_B-v_1)+m_2(v_2+v_B) \quad \therefore v_2=\frac{m_1}{m_2}v_1$$

2

(A)

(1)

力の大きさ：$\dfrac{km_A{}^2}{x_N{}^2}$，向き：$x$ 軸正方向

(B)

(2)

$\dfrac{\mu_0\pi a^2 km_A}{x_N{}^2}$

解説

磁界の強さ H の定義：1Wb の N 極の受ける力の大きさ

磁界の向きの定義：N 極の受ける力の向き

より，$H=\dfrac{km_A}{x_N{}^2}$

よって，$\Phi=\mu_0 H\cdot\pi a^2=\dfrac{\mu_0\pi a^2 km_A}{x_N{}^2}$

参考

電界の E 強さの定義：+1 C の電荷が受ける力の大きさ

電界の向きの定義：正電荷が受ける力の向き

(3)

0

解説

棒磁石 A が静止しているので，コイルには電流が発生しない。

電流が流れていないコイルには磁界が発生しない。

ゆえに，棒磁石とコイルは相互作用しない。

(4)

電流の大きさ：$\dfrac{2\mu_0\pi a^2 km_A v}{Rx_N{}^2}$

右ねじの進む向き：x 軸正方向

解説

起電力の大きさを V とすると，$V=\left|\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$

$$\Delta\Phi=\frac{\mu_0\pi a^2 km_A}{(x_N-\Delta x)^2}-\frac{\mu_0\pi a^2 km_A}{x_N{}^2}$$
$$=\mu_0\pi a^2 km_A\left\{\frac{1}{(x_N-\Delta x)^2}-\frac{1}{x_N{}^2}\right\}\quad(\Delta x>0)$$

ここで,

$$\frac{1}{(x_N-\Delta x)^2}=(x_N-\Delta x)^{-2}$$

$$=\left[x_N\left\{1+\left(-\frac{\Delta x}{x_N}\right)\right\}\right]^{-2}$$

$$=x_N{}^{-2}\left\{1+\left(-\frac{\Delta x}{x_N}\right)\right\}^{-2}$$

$$\approx\frac{1}{x_N{}^2}\left(1+\frac{2\Delta x}{x_N}\right)$$

$$=\frac{1}{x_N{}^2}+\frac{2\Delta x}{x_N{}^3}$$

$$\therefore \Delta\Phi\approx\mu_0\pi a^2 km_A\left(\frac{1}{x_N{}^2}+\frac{2\Delta x}{x_N{}^3}-\frac{1}{x_N{}^2}\right)$$

$$=\frac{2\mu_0\pi a^2 km_A\Delta x}{x_N{}^3}$$

$$\therefore\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\frac{2\mu_0\pi a^2 km_A}{x_N{}^3}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$=\frac{2\mu_0\pi a^2 km_A}{x_N{}^3}\cdot v$$

よって, $V=\dfrac{2\mu_0\pi a^2 km_A v}{x_N{}^3}$

これと $I=\dfrac{V}{R}$ より, $I=\dfrac{2\mu_0\pi a^2 km_A v}{Rx_N{}^3}$

また, $\Delta\Phi>0$ だから, レンツの法則より, コイルに生じる磁場の向きは,

すなわち電流が流れる向きにねじを回すときの右ねじの進む向きは, x 軸正の向き。

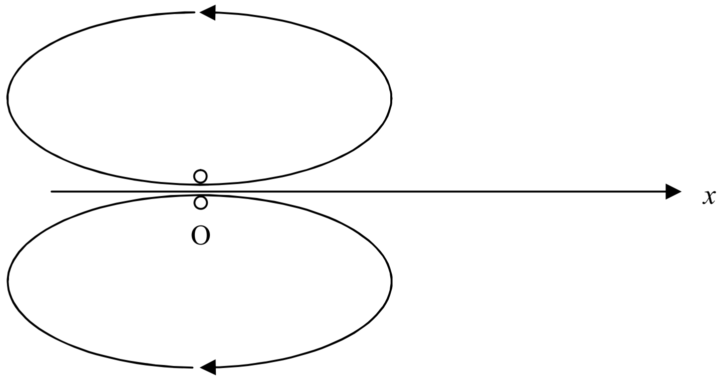
(5)

$$\frac{I}{2a}$$

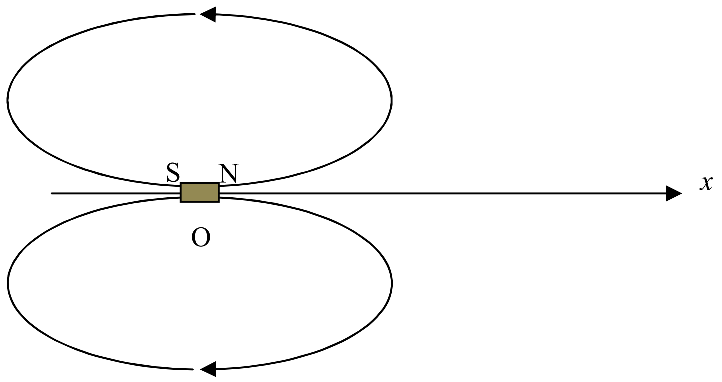
(C)

(6)

(a)



(b)



(7)

力の大きさ：$\dfrac{4km_Am_Cx_Nd_C}{\left(x_N{}^2-d_C{}^2\right)^2}$，向き：$x$ 軸負方向

解説

(A)で与えられた条件より，棒磁石 A の S 極の影響は無視してよい。

棒磁石 C の N 極が棒磁石 A の N 極から受ける力

距離が x_N-d_C，力の向きが x 軸負方向だから，$-\dfrac{km_Am_C}{(x_N-d_C)^2}$

棒磁石 C の S 極が棒磁石 A の N 極から受ける力

距離が x_N+d_C，力の向きが x 軸正方向だから，$\dfrac{km_Am_C}{(x_N+d_C)^2}$

よって，棒磁石 C が受ける力は$-\dfrac{km_Am_C}{(x_N-d_C)^2}+\dfrac{km_Am_C}{(x_N+d_C)^2}=\dfrac{-4km_Am_Cx_Nd_C}{\left(x_N{}^2-d_C\right)^2}$

3

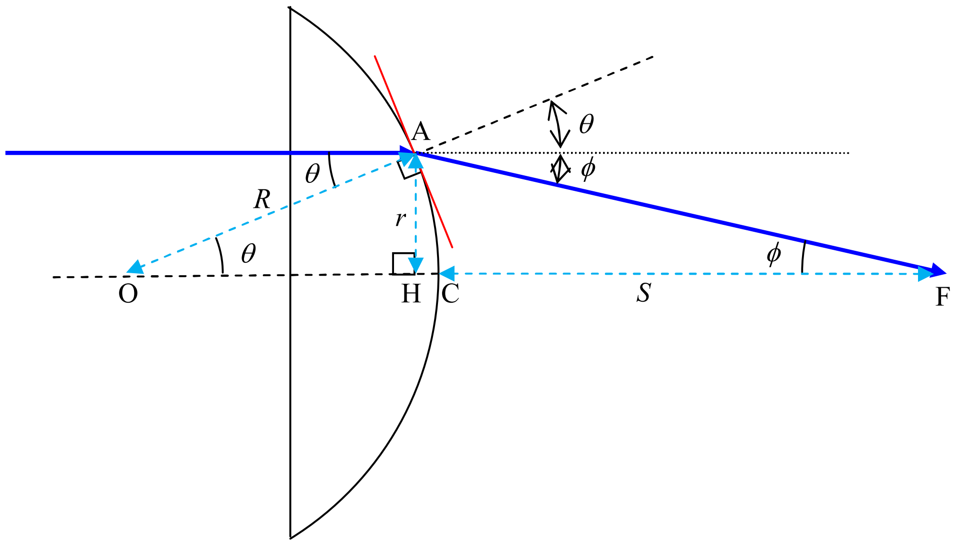
(A)

(1)

$$n=\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin\theta}$$

解説

入射角 θ，屈折角 $\theta+\phi$ より，$n\times\sin\theta=1\times\sin(\theta+\phi)$



(2)

$R\sin\theta$

(3)

$\{S+R(1-\cos\theta)\}\tan\phi$

解説

$r=\mathrm{FH}\tan\phi=(\mathrm{FC}+\mathrm{CH})\tan\phi=\{S+(\mathrm{OC}-\mathrm{OH})\}\tan\phi=\{S+R(1-\cos\theta)\}\tan\phi$

(4)

$$\frac{R}{n-1}$$

解説

$r=R\sin\theta\approx R\theta$，$r=\{S+R(1-\cos\theta)\}\tan\phi\approx S\phi$ より，$R\theta\approx S\phi$

$\therefore S=R\cdot\dfrac{\theta}{\phi}$ ・・・①

また，$n=\dfrac{\sin(\theta+\phi)}{\sin\theta}$ より，$n\approx\dfrac{\theta+\phi}{\theta}=1+\dfrac{\phi}{\theta}$ $\therefore\dfrac{\theta}{\phi}\approx\dfrac{1}{n-1}$ ・・・②

①，②より，$S\approx\dfrac{R}{n-1}$

(B)

(5)

$R-\sqrt{R^2-r^2}$

解説

$\mathrm{OH}^2=\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2$, $\mathrm{OH}=\mathrm{OC}-\mathrm{CH}$ より, $(R-d)^2=R^2-r^2$

$\therefore d^2-2Rd+r^2=0$

これと $d<R$ より,

$d=R-\sqrt{R^2-r^2}$

(6)

$\sqrt{(L+d)^2+r^2}$

解説

$\mathrm{AG}^2=\mathrm{GH}^2+\mathrm{AH}^2$, $\mathrm{GH}=\mathrm{GC}+\mathrm{CH}$ より, $\mathrm{AG}^2=(L+d)^2+r^2$ $\therefore \mathrm{AG}=\sqrt{(L+d)^2+r^2}$

(7)

$\dfrac{\lambda}{n}$

(8)

$\dfrac{n(l-d)+\sqrt{(L+d)^2+r^2}}{\lambda}$

解説

BA 間の波数$=\dfrac{l-d}{\frac{\lambda}{n}}=\dfrac{n(l-d)}{\lambda}$

AG 間の波数$=\dfrac{\sqrt{(L+d)^2+r^2}}{\lambda}$

より,

$\dfrac{n(l-d)+\sqrt{(L+d)^2+r^2}}{\lambda}$

(9)

$\dfrac{nl+L}{\lambda}$

(10)

$\dfrac{r^2-d^2(n^2-1)}{2d(n-1)}$

解説

$$\frac{nl+L}{\lambda}=\frac{n(l-d)+\sqrt{(L+d)^2+r^2}}{\lambda} \text{ より，} \quad nl+L=n(l-d)+\sqrt{(L+d)^2+r^2}$$

よって，$L+nd=\sqrt{(L+d)^2+r^2}$ 　 $\therefore (L+nd)^2=(L+d)^2+r^2$

$$\therefore L=\frac{r^2-d^2(n^2-1)}{2d(n-1)}$$

(11)

$$\frac{R}{n-1}$$

解説

(5)より，$d=R-\sqrt{R^2-r^2}$

よって，

$$d=R-R\left\{1+\left(-\frac{r}{R}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx R-R\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}$$

$$=R-R+\frac{r^2}{2R}$$

$$=\frac{r^2}{2R}$$

よって，

$$L=\frac{r^2-d^2(n^2-1)}{2d(n-1)}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\frac{r^2}{2d}-\frac{d(n+1)}{2}\right\}$$

$$\approx\frac{1}{n-1}\left\{\frac{r^2}{\frac{r^2}{R}}-\frac{\frac{r^2(n+1)}{2R}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{R-\frac{r^2(n+1)}{4R}\right\}$$

$$=\frac{R}{n-1}\left\{1-(n+1)\left(\frac{r}{2R}\right)^2\right\}$$

$$\approx\frac{R}{n-1}$$